

Binomické rovnice



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium, Šternberk, Horní nám. 5
Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0218
Šablona	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Označení materiálu	VY_32_INOVACE_Čerm_03a
Vypracoval(a), Dne	Mgr. Jana Čermáková, 21. 10. 2012
Ověřeno (datum)	2.11.2012
Předmět	Matematika
Třída	3. B
Téma hodiny	Binomické rovnice
Druh materiálu	Prezentace
Anotace	Vysvětlení způsobu řešení a procvičení řešení binomických rovnic v množině komplexních čísel

- Řešení binom. rovnic znázorňujeme v tzv. Gaussově rovině
- Více informace o významném matematikovi hledej na:
- http://cs.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

- **Binomická rovnice**
- je každá rovnice ve tvaru $x^n - a = 0$
- a - komplexní číslo v goniometrickém tvaru
- x – neznámá
- n – přiroz. číslo > 1
- $a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$
- je – li $a = 0 \rightarrow$ rov. má jediné řešení $\rightarrow x = 0$
- Binomická rovnice má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:
- $$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$
- v Gaussově rovině leží všechny kořeny ve vrcholech pravidelného n – úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souř. a poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$

- **V množině komplexních čísel řešte rovnici:**
- $x^3 - i = 0$
- Řešení: viz prac. list
- Úkoly k procvičení:
- a) $x^6 + 64 = 0$
- b) $x^4 - 1 = 0$
- c) $x^8 + 1 = 0$
- d) $x^4 + 2 - 2i = 0$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium, Šternberk, Horní nám. 5
Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0218
Šablona	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Označení materiálu	VY_32_INOVACE_Čerm_03b
Vypracoval(a), Dne	Mgr. Jana Čermáková, 21. 10. 2012
Ověřeno (datum)	2.11.2012
Předmět	Matematika
Třída	3. B
Téma hodiny	Binomická rovnice
Druh materiálu	Pracovní list
Anotace	Vysvětlení způsobu řešení a procvičení řešení binomických rovnic v množině komplexních čísel

Binomická rovnice

je každá rovnice ve tvaru $x^n - a = 0$, kde a - komplexní číslo v goniometrickém tvaru, x – neznámá, n – přiroz. číslo > 1

$$a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

je – li $a = 0 \rightarrow$ rov. má jediné řešení $\rightarrow x = 0$

Binomická rovnice má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

znázorníme – li kořeny binom. rovnice v Gaussově rovině, vidíme, že všechny leží ve vrcholech pravidelného n – úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souř. a poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V množině komplexních čísel řešte rovnici:

$$x^3 - i = 0 \quad x^3 = i$$

$$z = 0 + 1i \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \quad \cos \varphi = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} \quad \sin \varphi = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi = 90^\circ \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

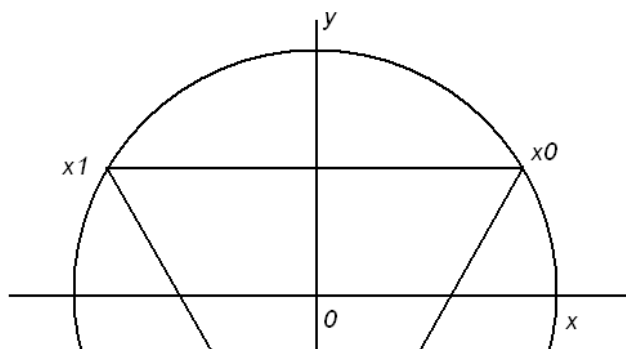
$$x_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

řešení binomické rovnice lze znázornit v Gaus. rovině

Všechna řešení leží ve vrcholech pravidelného n -úhelníku, jehož poloměr $r = |z|$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

úkolý k procvičení :

a) $x^6 + 64 = 0$ návod – upravit na tvar $x^6 - (-64 + 0i) = 0$

$$x_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 0\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{6} + i \sin \frac{1}{2}\pi \right)$$

$$x_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$x_3 = 2 \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right)$$

$$x_4 = 2 \left(\cos \frac{9}{6}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$x_5 = 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)$$

b) $x^4 - 1 = 0$ návod – upravit na tvar $x^4 - (1 + 0i) = 0$

$$x_0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0}{4} + i \sin \frac{0}{4} \right) = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1 + 0 \cdot i = \underline{1}$$

$$x_1 = 1 \left(\cos \frac{0+2\pi}{4} + i \sin \frac{0+2\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = \underline{i}$$

$$x_2 = \cos \frac{0+4\pi}{4} + i \sin \frac{0+4\pi}{4} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i = \underline{-1}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x_3 = \cos \frac{0+6\pi}{4} + i \sin \frac{0+6\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 + -1 \cdot i = \underline{\underline{-i}}$$

c) $x^8 + 1 = 0$ návod – upravit na tvar $x^8 - (-1 + 0i) = 0$

$$x_0 = (\cos \frac{1}{8}\pi + i \sin \frac{1}{8}\pi)$$

$$x_1 = (\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi)$$

$$x_2 = (\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi)$$

$$x_3 = (\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi)$$

$$x_4 = (\cos \frac{9}{8}\pi + i \sin \frac{9}{8}\pi)$$

$$x_5 = (\cos \frac{11}{8}\pi + i \sin \frac{11}{8}\pi)$$

$$x_6 = (\cos \frac{13}{8}\pi + i \sin \frac{13}{8}\pi)$$

$$x_7 = (\cos \frac{15}{8}\pi + i \sin \frac{15}{8}\pi)$$

d) $x^4 + 2 - 2i = 0$ návod – upravit na tvar $x^4 - (-2 + 2i) = 0$

$$x_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} (\cos \frac{3}{16}\pi + i \sin \frac{3}{16}\pi)$$

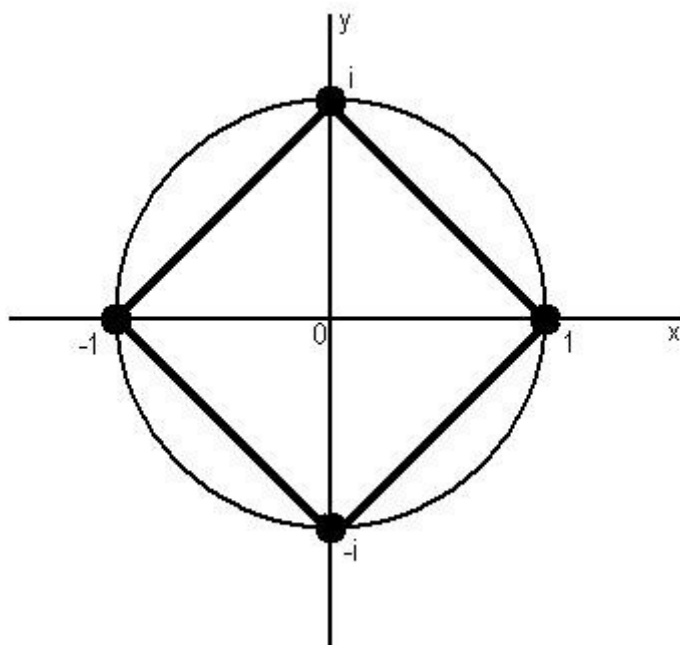
$$x_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} (\cos \frac{11}{16}\pi + i \sin \frac{11}{16}\pi)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} (\cos \frac{19}{16}\pi + i \sin \frac{19}{16}\pi)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} (\cos \frac{27}{16}\pi + i \sin \frac{27}{16}\pi)$$

e) urči kořeny binomické rovnice, které jsou znázorněny v Gaus. rovině, pokus se danou rovnicí sestavit:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Další úkoly k procvičení je možné čerpat např.:

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám a vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-099-7.

KUBÁT, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-298-8.