

Úvod do matematiky

Mgr. Radek Horenský, Ph.D.

Výroky II

Výroky

Výroky mohou vzniknout také z výrokových forem (sdělení, která nejsou výrokem, ale stane se z nich výrok po dosazení za neznámé z daného oboru proměnnosti).

Základními kvantifikátory jsou

- **obecný kvantifikátor** (výrok je platný pro libovolné dosazení za proměnnou)
- **existenční kvantifikátor** (výrok je platný alespoň pro jedno vhodné dosazení za proměnnou).

Výroky

Obecný kvantifikátor zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in M: V(x)$$

a čteme:

„pro každé x z množiny M platí tvrzení V “

Existenční kvantifikátor zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in M: V(x)$$

a čteme:

„pro aspoň jedno x z množiny M platí tvrzení V “

Výroky

Negaci výroku s **obecným kvantifikátorem**

$$\forall x \in M: V(x)$$

dostaneme ve tvaru

$$\exists x \in M: \neg V(x)$$

Negaci výroku s **existenčním kvantifikátorem**

$$\exists x \in M: V(x)$$

dostaneme ve tvaru

$$\forall x \in M: \neg V(x)$$

Výroky

Některé výroky mohou být tvořeny i pomocí několika kvantifikátorů, kdy každý kvantifikuje jinou proměnnou. Např.

$$\forall x \in M \exists y \in N: V(x, y)$$

a čteme

„ke každému x z množiny M existuje y z množiny N takové, že je splněno tvrzení $V(x, y)$ “

Negace takového výroku je pak ve tvaru

$$\exists x \in M \forall y \in N: \neg V(x, y)$$

a čteme

„existuje aspoň jedno x z množiny M takové, že pro všechna y z množiny N platí, že není splněno tvrzení $V(x, y)$ “

Výroky

Další kvantifikátory se vztahují k počtu prvků dané množiny, pro něž je splněno dané tvrzení. Základní 3 druhy kvantifikace jsou:

Tvrzení platí pro:

- aspoň k prvků (tj. pro $k, k + 1, k + 2$ prvků atd.)
- nejvýše k prvků (tj. pro $k, k - 1, k - 2$ prvků atd.)
- právě k prvků (tj. pouze pro k prvků)

Výroky

Negace daných tvrzení pak jsou ve tvaru:

- pro tvrzení platné pro aspoň k prvků:
 - **tvrzení platí pro nejvýše $k - 1$ prvků**
- pro tvrzení platné pro nejvýše k prvků:
 - **tvrzení platí pro aspoň $k + 1$ prvků**
- pro tvrzení platné pro právě k prvků:
 - **tvrzení platí pro nejvýše $k - 1$ prvků nebo pro aspoň $k + 1$ prvků**

Výroky

Cvičení:

Negujte dané výroky:

- Každé prvočíslo je liché číslo.
- Student vypracoval všech pět zadáných úloh.
- Bylo nás tam nejméně 10.
- Proti předloženému návrhu nebyl odevzdán žádný hlas.
- Stavba potrvá nejvýše tři roky.
- Dané přímky se protínají právě ve dvou bodech.

Výroky

Cvičení:

Negujte dané výroky:

- Žádný žák v naší třídě nenosí brýle.
- Právě jeden z nás půjde do kina.
- Nejvýše tři z vypočtených součtů jsou celočíselné.
- Koupím salám právě tehdy, když nebude šunka.
- Daný trojúhelník je pravoúhlý a aspoň jeden jeho úhel má velikost menší než 30° .
- $\exists x \in R: x^2 = -2$

Výroky

Řešení:

- Aspoň jedno prvočíslo není liché číslo.
- Student vypracoval maximálně čtyři zadané úlohy. (5 bylo maximum...)
- Bylo nás tam alespoň 11.
- Proti předloženému návrhu byl odevzdán aspoň jeden hlas.
- Stavba potrvá více než tři roky.
- Dané přímky se protínají nejvýše v jednom nebo alespoň ve třech bodech.
- Aspoň jeden žák v naší třídě nosí brýle.
- Do kina půjdou alespoň dva z nás nebo nikdo.
- Alespoň čtyři z vypočtených součtů jsou celočíselné.
- Koupím salám právě tehdy, když bude šunka.
- Daný trojúhelník není pravoúhlý nebo všechny jeho úhly mají velikost větší nebo rovnu 30° .
- $\forall x \in R: x^2 \neq -2$

Citace:

Příklady (není-li uvedeno jinak) a formulace definic jsou vlastní, pouze tematicky vycházejí z následující učebnice:

BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia: základní poznatky*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 178 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-468.