

# Úvod do matematiky

Mgr. Radek Horenský, Ph.D.

## **Důkazy**

# Důkazy

**Matematika** a matematické chápání jako takové je založeno na logické výstavbě.

Základními stavebními prvky jsou **definice, věty a důkazy**.

- **Definice** zavádějí nové pojmy, nedokazujeme je.
- **Věta** popisuje vlastnosti objektů, vysvětluje souvislosti mezi pojmy.
- **Důkaz** je logické vysvětlení, které vychází ze zákonů výrokové logiky.

# Důkazy

Základními čtyřmi typy důkazů využívanými v matematice jsou:

- Důkaz **přímý**
  - výroku ve tvaru implikace
  - výroku atomárního
- Důkaz **nepřímý**
  - výroku ve tvaru implikace
- Důkaz **sporem**
  - výroku atomárního
  - výroku ve tvaru implikace
- Důkaz pomocí **matematické indukce**

# Důkazy

Důkaz přímý pro tvrzení ve tvaru implikace  $a \Rightarrow b$ :

- využíváme zákon o tranzitivitě implikace.

Nechť platí následující implikace:

- z výroku  $a$  vyplývá tvrzení  $c_1$
- z tvrzení  $c_1$  vyplývá tvrzení  $c_2$
- z tvrzení  $c_2$  vyplývá tvrzení  $c_3$ , atd.
- až nakonec z tvrzení  $c_n$  vyplývá tvrzení  $b$ .

Protože jsou všechny implikace pravdivé, logicky správné, musí z tvrzení  $a$  vyplývat také tvrzení  $b$ .

# Důkazy

Příklad: Dokažte, že pro všechna přirozená čísla  $n$  platí: Jestliže  $2n + 3$  je násobkem pěti, pak také  $7n - 12$  je dělitelné pěti.

Důkaz:

Rozdíl obou výrazů  $(7n - 12) - (2n + 3) = 5n - 15$  je násobkem pěti.

Je-li tedy výraz  $2n + 3 = 5t$  pro vhodné přirozené  $t$ , pak  $7n - 12 = 5t + 5n - 15 = 5s$  pro vhodné celé  $s$ . Proto je tedy  $7n - 12$  také dělitelné pěti.

# Důkazy

Důkaz přímý pro atomární výrok  $v$ :

- opět využíváme zákon o tranzitivitě implikace
- pro důkaz však potřebujeme najít platné tvrzení  $u$ , ze kterého daný výrok odvodíme
- daný platný výrok hledáme ekvivalentními úpravami výroku  $v$

Nechť platí následující implikace:

- z platného výroku  $u$  vyplývá opět platné tvrzení  $c_1$
- z tvrzení  $c_1$  vyplývá tvrzení  $c_2$ , atd.
- až nakonec z tvrzení  $c_n$  vyplývá tvrzení  $v$ .

Protože jsou všechny implikace pravdivé, logicky správné, musí z platného tvrzení  $u$  vyplývat také tvrzení  $v$ .

# Důkazy

Příklad: Dokažte, že pro všechna reálná čísla  $x, y$  platí:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

Důkaz:

Ekvivalentními úpravami dostáváme postupně:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0.$$

# Důkazy

Protože všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, vyplývá z platného tvrzení

$$(x - y)^2 \geq 0$$

platnost všech předchozích úprav. Proto musí být nutně platné i původní tvrzení

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Navíc z úprav také plyne, že ve všech případech současně nastává rovnost, a to jen pro volbu

$$x = y.$$



# Důkazy

Důkaz nepřímý pro tvrzení ve tvaru implikace  $a \Rightarrow b$ :

- využíváme zákon o tranzitivitě implikace
- místo původní implikace dokazujeme obměněnou implikaci, tj. tvrzení  $\neg b \Rightarrow \neg a$

Nechť platí následující implikace:

- z výroku  $\neg b$  vyplývá tvrzení  $c_1$
- z tvrzení  $c_1$  vyplývá tvrzení  $c_2$ , atd.
- až nakonec z tvrzení  $c_n$  vyplývá tvrzení  $\neg a$ .

Protože jsou všechny implikace pravdivé, logicky správné, musí z tvrzení  $\neg b$  vyplývat také tvrzení  $\neg a$ , a tedy původní implikace  $a \Rightarrow b$  je stejně jako  $\neg b \Rightarrow \neg a$  pravdivá.

# Důkazy

Důkaz sporem je kombinací důkazu přímého pro atomární výrok  $v$  a nepřímého důkazu.

Na začátku předpokládáme, že daný výrok neplatí, tj. platí tvrzení  $\neg v$ . Postupnými úpravami (řetězec implikací) dojdeme k nepravdivému tvrzení (ke **sporu**). Je-li výsledný výrok nepravdivý, musí být nutně předpoklad každé z implikací nepravdivý, a tedy nemůže být splněna  $\neg v$ .

Proto je tedy  $v$  splněno.

# Důkazy

Příklad: Dokažte, že bodem  $M$ , který neleží na přímce  $p$  lze vést k této přímce jedinou kolmicí.

Důkaz: Předpokládejme, že takové kolmice jsou aspoň dvě. Jejich průsečíky (navzájem různé) s přímkou  $p$  označme  $A, B$ . Dostáváme tak trojúhelník  $ABM$ . V tomto trojúhelníku jsou však podle předpokladu dva úhly pravé, takže velikost třetího úhlu by musela být  $0^\circ$ , což nelze. Dostali jsme tak **SPOR**. Negace tvrzení je tedy nepravdivá, a tedy původní tvrzení platí.

Pozn.: Tímto způsobem jsme ukázali, že k přímce lze vést nejvýše jednu kolmicí. Existenci takové kolmice umíme prokázat např. geometrickou konstrukcí.

# Důkazy

Poslední důkazová technika (užití matematické indukce) bude probrána v semináři z matematiky, resp. ve 4. ročníku v kapitole Posloupnosti.

## Nezapomeňte!

Máme-li tvrzení ve tvaru ekvivalence  $a \Leftrightarrow b$ , musíme dokázat oba směry implikace, tj. implikaci  $a \Rightarrow b$  i implikaci  $b \Rightarrow a$ .

# Citace:

Příklady (není-li uvedeno jinak) a formulace definic jsou vlastní nebo všeobecně známé, pouze tematicky vycházejí z následující učebnice:

BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia: základní poznatky*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 178 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-468.