INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium, Šternberk, Horní nám. 5
Číslo projektu	CZ.1.07/1.5.00/34.0218
Šablona	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Označení materiálu	VY_32_INOVACE_Hor004
Vypracoval(a), dne	Mgr. Radek Horenský, Ph.D., 3.3.2013
Ověřeno (datum)	18.3.2013
Předmět	Matematika
Třída	3.A
Téma hodiny	Permutace
Druh materiálu	Prezentace v Powerpointu
Anotace	Základní pravidla pro určení počtu permutací (pořadí) prvků

Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Mgr. Radek Horenský, Ph.D.

Permutace

Permutace

V následujících kapitolách budou uvedeny některé pojmy, s nimiž se běžně operuje ve středoškolské matematice:

- Pořadí (Permutace)
- Variace
- Kombinace

Vzorce, které budou používány, se budeme snažit spíše odvodit, než jen pouze definovat.

Permutace

Permutace (pořadí) z n prvků.

Mějme konečnou množinu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Uspořádanou n –tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde se každý prvek množiny A vyskytuje mezi prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ právě jednou, nazveme permutací (pořadím) z prvků množiny A.

Pro celkový počet $P(n)$ všech permutací konečné n –prvkové množiny A pak platí:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

kde číslo $n!$ čteme „n faktoriál“. Vlastnosti faktoriálu budou popsány v samostatné kapitole.

Permutace

Důkaz daného vztahu plyne přímo z kombinatorického pravidla součinu.

První prvek uspořádané n –tice můžeme vybrat n různými způsoby, druhý prvek $(n-1)$ způsoby (možností je o 1 méně, protože jsme už jeden prvek použili), atd. až pro výběr předposledního prvku máme možnosti 2 a poslední člen je už dán jednoznačně (1 možnost).

Proto vynásobením daných počtů máme celkem $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ možností.

Permutace

Ukažme nyní pro ilustraci několik jednoduchých příkladů:

Příklad 1:

Kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$, nesmí-li se žádná číslice opakovat?.

Permutace

Příklad 1:

Kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$, nesmí-li se žádná číslice opakovat?.

Řešení:

První číslici lze vybrat čtyřmi způsoby, druhou třemi, třetí dvěma a poslední jediným způsobem. Celkově se tedy jedná o všechny permutace čtyřprvkové množiny, kterých je

$$P(4) = 4! = 24.$$

Permutace

Příklad 2:

Kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $0, 1, 2, 3$, nesmí-li se žádná číslice opakovat?.

Permutace

Příklad 2:

Kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $0, 1, 2, 3$, nesmí-li se žádná číslice opakovat?.

Řešení:

Oproti předchozímu příkladu musíme z celkového počtu 24 čísel odebrat ta, která „začínají“ číslicí 0, protože taková čísla by byla trojmístná. Celkově je tedy čísel

$$P(4) - P(3) = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Využíváme-li pravidlo součinu, pak pro první pozici máme 3 možná dosazení (bez nuly), pro druhou pozici máme opět 3 možná dosazení (jedna číslice už je použita, ale mohu použít i nulu), pro další pozici máme 2 možnosti a pro poslední 1 možnost. Celkově je tedy čísel

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18.$$

Permutace

Příklad 3:

Určete, kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$, nesmí-li se žádná číslice opakovat a platí:

a. Číslice 1 je zapsána dříve než číslice 4.

b. Číslice 1 je zapsána bezprostředně před číslicí 4.

Permutace

Příklad 3:

Určete, kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$, nesmí-li se žádná číslice opakovat a platí:

a. Číslice 1 je zapsána dříve než číslice 4.

Řešení:

Pokud prohodíme číslice 1 a 4, dostaneme z vyhovujícího čísla nevyhovující a naopak. Proto je přesně polovina všech čísel vyhovujících a polovina nevyhovujících. Vyhovujících čísel je tedy 12.

Permutace

Příklad 3:

Určete, kolik čtyřmístných přirozených čísel lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$, nesmí-li se žádná číslice opakovat a platí:

b. Číslice 1 je zapsána bezprostředně před číslicí 4.

Řešení:

Představíme-li si dvojici 14 jak jeden znak, převedeme úlohu na hledání počtu pořadí 3 prvků, a to $14, 2, 3$. Takových pořadí je

$$P(3) = 3! = 6.$$

Citace:

Příklady (není-li uvedeno jinak) a formulace definic jsou vlastní, resp. všeobecně známé, pouze tematicky vycházejí z následující učebnice:

CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, c2001, 170 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-475.